



TITLE:

# 正六角形格子上でのRayleigh-Benard対流 (流れの遷移と乱流のスケルトン)

AUTHOR(S):

藤村, 薫

---

CITATION:

藤村, 薫. 正六角形格子上でのRayleigh-Benard対流 (流れの遷移と乱流のスケルトン). 数理解析研究所講究録 2005, 1454: 111-124

ISSUE DATE:

2005-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47808>

RIGHT:

# 正六角形格子上での Rayleigh-Bénard 対流

鳥取大学・応用数理工学科 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

Department of Applied Mathematics and Physics

Tottori University

## 1 はじめに

水平面内で一様、等方な場が不安定となり、Euclid 対称性の破れによって空間パターンが出現する例として、Rayleigh-Bénard 対流や Marangoni 対流の平面形がよく知られている。熱伝導状態の線形臨界固有状態は波数平面上の臨界円の上で重複度無限大の縮退をしている。そのような問題の解析を簡単化するために歴史的にとられた手段は、解空間を正六角形格子、もしくは正方形格子の上に制限し、臨界円の上に格子点が厳密にそれぞれ6個、もしくは4個存在する状況を考えることである。弱非線形理論を適用すると、それぞれ実空間で6次元もしくは4次元の力学系（振幅方程式）が導かれる。振幅方程式に含まれる非線形項を3次で打ち切った解析の結果、たとえば Boussinesq 近似のもとで流体密度が温度の1次関数である Rayleigh-Bénard 対流パターンとしてはロールが安定であること、また、非 Boussinesq 効果や密度の温度への2次以上の依存性をもつ Rayleigh-Bénard 対流や Marangoni 対流パターンとしては正六角形が安定な対流パターンであることが知られており、これらの結果は実験的にも支持されている。[2],[11]

しかし、1980年代に同変分岐理論がこの問題に適用された結果、3次までの近似では Boussinesq 近似のもとで流体密度が温度の1次関数であるような最も基本的な Rayleigh-Bénard 対流の場合には、熱伝導状態からの1次分岐を適切に取り扱うことはできず、少なくとも5次の非線形項を振幅方程式に取り込む必要のあることが明らかになった。[4],[12] それにもかかわらず、今日までのところ、正六角形格子もしくは正方形格子上で流体方程式から5次の振幅方程式を導出して、形成される対流パターンを調べた研究は Knobloch による一例しか存在しない。[13] Knobloch は、上下の温度に対する境界条件が断熱に近い場合を考えているので、流体方程式は長波長近似のもとに水平面内の2次元偏微分方程式に帰着される。そこからの振幅方程式の導出は容易であり、方程式に含まれる係数は陽的に評価することができる。その代わり、通常の Rayleigh-Bénard 対流では現れない新たな縮退が生じ、得られた分岐特性も従来のものとは異なっている。

本研究では、Boussinesq 近似のもとで、流体密度が温度の1次関数である Rayleigh-Bénard 問題を取り上げる。上下境界が完全伝導条件を満足する対流のパターン形成は、歴史的に繰り返し検討されてきた問題であるが、まだ最終的な決着を見ていない。中心多様体低減を5次のオーダーまで進めることにより、5次の非線形項を含む振幅方程式を導出し、5次の項が分岐に及ぼす影響を吟味するのがここでの目的である。

## 2 Stuart-Landau 方程式の適用限界

本題に入る前に、準中立単色波攪乱の弱非線形発展を記述する Stuart-Landau 方程式の収束性について調べてみよう。Stuart-Landau 方程式は  $O(\epsilon^7)$  までの近似では

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & \epsilon^2(\sigma + \epsilon^2\sigma^{(1)} + \epsilon^4\sigma^{(2)} + \cdots)z + (\lambda_1 + \epsilon^2\lambda_1^{(1)} + \epsilon^4\lambda_1^{(2)} + \cdots)|z|^2z \\ & + (\lambda_2 + \epsilon^2\lambda_2^{(1)} + \cdots)|z|^4z + (\lambda_3 + \cdots)|z|^6z + \cdots \end{aligned}$$

Table 1: 平面 Poiseuille 流ならびに Rayleigh-Bénard 問題における Landau 係数. 二重の縦線の右側は Rayleigh-Bénard 対流. 係数は線形臨界点で評価した.

平面 Poiseuille		$P = 0.025$	$P = 0.2515$	$P = 0.71$	$P = 7$
$\sigma$	$5.7 \times 10^1$	$9.2 \times 10^{-1}$	6.5	$1.1 \times 10^1$	$1.8 \times 10^1$
$\lambda_1$	$3.1 \times 10^1$	$-5.2 \times 10^{-1}$	$-2.2 \times 10^{-1}$	$-3.3 \times 10^{-1}$	$-5.2 \times 10^{-1}$
$\lambda_2$	$-3.0 \times 10^5$	3.2	$-2.3 \times 10^{-6}$	$-6.9 \times 10^{-3}$	$-1.3 \times 10^{-2}$
$\lambda_3$	$6.4 \times 10^9$	$-2.2 \times 10^1$	$-1.3 \times 10^{-4}$	$-4.4 \times 10^{-4}$	$-9.8 \times 10^{-4}$
$\lambda_4$	$-2.9 \times 10^{14}$	$1.0 \times 10^2$	$-1.8 \times 10^{-6}$	$-4.0 \times 10^{-5}$	$-1.2 \times 10^{-4}$
$\lambda_5$	$2.1 \times 10^{19}$	$3.7 \times 10^1$	$3.6 \times 10^{-7}$	$-4.7 \times 10^{-6}$	$-1.8 \times 10^{-5}$
$\lambda_6$	$-2.0 \times 10^{24}$	$-6.8 \times 10^3$	$1.9 \times 10^{-8}$	$-6.4 \times 10^{-7}$	$-3.4 \times 10^{-6}$
$\lambda_7$	$2.3 \times 10^{29}$	$6.5 \times 10^4$	$-5.4 \times 10^{-10}$	$-1.0 \times 10^{-7}$	$-7.2 \times 10^{-7}$
$\lambda_8$	$-3.2 \times 10^{34}$	$-9.3 \times 10^4$	$-2.3 \times 10^{-10}$	$-1.8 \times 10^{-8}$	$-1.8 \times 10^{-7}$
$\lambda_9$	$5.0 \times 10^{39}$	$-4.9 \times 10^6$	$-3.6 \times 10^{-11}$	$-3.4 \times 10^{-9}$	$-4.8 \times 10^{-8}$

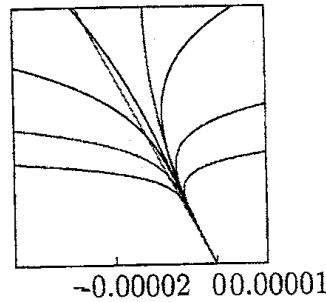


Figure 1: 3次から19次までの振幅方程式に基づく平面 Poiseuille 流の線形臨界波数における臨界振幅値. 横軸は超臨界性を表すパラメータ  $R_c^{-1} - R^{-1}$ , 縦軸は  $|z|^2$ . 直線は3次の方程式にもとづく結果.

のような形をもつ. ここで,  $\epsilon^2 = R_c^{-1} - R^{-1}$  もしくは  $(R - R_c)/R_c$  は超臨界性を表す分岐パラメータであり,  $R$  はそれぞれ Reynolds 数や Rayleigh 数を意味する. 各項に含まれる  $O(\epsilon^2)$  の補正項を無視すると, 方程式は

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon^2 \sigma z + \lambda_1 |z|^2 z + \lambda_2 |z|^4 z + \lambda_3 |z|^6 z + \dots$$

のように書くことができる. 平面 Poiseuille 流に対する高次の Stuart-Landau 方程式の係数は Herbert によって求められたが, [10] その結果, 方程式の収束が極端に悪いことが明らかになった. Table 1 に 19 次の振幅方程式に含まれる係数の実部を示す. この係数値を用いて求められる 3 次から 19 次までの方程式にもとづく臨界振幅値を Fig.1 に示した. 方程式に含まれる非線形項の係数の実部は次数が高くなるにつれその符号を交互に変え, また, 絶対値は急増する. その結果, Stuart-Landau 方程式の収束は非常に悪くなるため, 平面 Poiseuille 流に対する弱非線形理論は漸近展開としての意味で理解すべきであると考えられる.

これに反して, Rayleigh-Bénard 問題の場合には, Stuart-Landau 方程式の収束性は十分良いと期待されてきたように思われる. 4 種類の Prandtl 数に対して求めた Landau 係数値とそれらにもとづく分岐ダイアグラムを Table 1 ならびに Fig.2 に示す.  $P < 0.2515$  では平面 Poiseuille 流の場合と同様に, Landau 係数の値は高次になるにしたがってその絶対値が急増し, また, その符号も頻繁に変化する. そのため, 収束範囲は  $P \geq 0.2515$  の場合と比べ極端に狭くなることがわかる.  $P = 0.2515$  はきわめて特殊な状況である, 第 2 番目以上の Landau 係数の実部は非常に低い値を

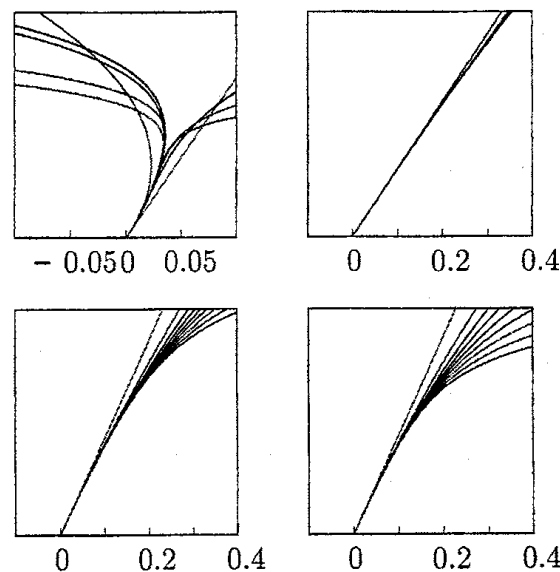


Figure 2: 3次から19次までの振幅方程式に基づく Rayleigh-Bénard 問題の線形臨界波数における臨界振幅値. 左上, 右上, 左下, 右下の順に  $P = 0.025, 0.2515, 0.71, 7$ . 横軸は超臨界性を表すパラメータ  $(R - R_c)/R_c$ , 縦軸は  $|z|^2$ . 直線は3次の方程式にもとづく結果.

とるため, 3次の非線形項が線形項とバランスするという3次の方程式でおこっていた状況は, 高次の非線形項を付加しても変わらない.  $P \geq 0.71$  では Landau 係数の値が高次になるにつれ緩やかに減少するため, ここでも3次の非線形項がもっとも支配的であるという状況に変わりはないが, 0.2515 の場合と比べ, 高次の非線形項の寄与がわずかに残っていることが Fig.2 からわかる.

以上をまとめると, 高 Prandtl 数では Stuart-Landau 方程式の適用範囲はかなり広いといえることができる. 一方, 低 Prandtl 数流体の場合には流体力学的不安定性問題と類似の状況になり, 収束範囲は非常に狭い.

なお, 平面 Poiseuille 流の場合には臨界点における分岐は亜臨界であるが, 主流の如何にかかわらず, 亜臨界領域では高次の中心多様体が0割を含むことがわかっているため, 実質的な収束半径は0といわざるを得ない.

弱非線形理論を高次近似まで展開する場合には, この収束性に関する性質を十分に考慮に入れる必要がある. いたずらに高次まで展開を進めても流体方程式のもつ分岐特性が得られるという保証はない. ただ, 低次の振幅方程式に非線形縮退が生じる場合に限り, 高次の項を取り込む必要がある. 以下の節では, そのような縮退の生じるケースを取り上げるが, そこでは高次の項が分岐特性に決定的な影響を及ぼす.

### 3 上下の対称性が存在しない場合の対流パターン

以下では正六角形格子上的でのパターン形成を議論しよう. 正六角形格子は  $\Gamma_h = D_6 \uparrow T^2$  という対称性をもつ. 波数平面上に描かれた臨界円の上に厳密に6つの格子点が存在する状況を考え, そのような波数ベクトルをもつモードの複素振幅を  $z_1, z_2, z_3$  およびそれらの複素共役  $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$  と名付ける.

対称群  $\Gamma_h$  は  $(z_1, z_2, z_3)$  に対して以下のように作用する：

$$D_6 \begin{cases} c: & (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \\ D_3 \begin{cases} R_{2\pi/3}: & (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (z_2, z_3, z_1) \\ \sigma_v: & (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (z_1, z_3, z_2) \end{cases} \end{cases}$$

$$T^2: (s, t) \cdot z = (e^{is} z_1, e^{-i(s+t)} z_2, e^{it} z_3)$$

熱伝導状態がこの対称性をもつ場合、臨界点で熱伝導状態が不安定になることによって対称性の低下が生じるが、その結果、1次分岐解としてはロール (R) と正六角形 (H) の2種類、また、2次分岐解としては三角形 (T) と長方形 (RA, 偽六角形) が存在する。

$\Gamma_h$  の作用のもとに不変な振幅方程式は

$$\dot{z}_1 = z_1 \mathcal{H}(\lambda, u_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q) + \bar{z}_2 \bar{z}_3 \mathcal{P}(\lambda, u_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q)$$

$$\mathcal{H} = h_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q) + u_1 h_3(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q) + u_1^2 h_5(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q),$$

$$\mathcal{P} = p_2(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q) + u_1 p_4(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q) + u_1^2 p_6(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q)$$

$$u_j = |z_j|^2, \quad \sigma_1 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \sigma_2 = u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1,$$

$$\sigma_3 = u_1 u_2 u_3, \quad q = z_1 z_2 z_3 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3$$

という形をとる。  $h_1, h_3, h_5$  ならびに  $p_2, p_4, p_6$  は、  $\Gamma_h$ -不変量の実数値関数である。 [4]

ロール解は  $(z_1, z_2, z_3) = (x, 0, 0)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  によって定義される。分岐方程式は

$$0 = \mathcal{H}(x)$$

で与えられる。

次に、  $z_1 = z_2 = z_3$  という平衡解を考える。  $z_j(t) = r_j(t) e^{i\theta_j(t)}$ ,  $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \Theta(t)$  とおくと、分岐方程式は

$$0 = \mathcal{H}(r, \cos \Theta) + r \cos \Theta \cdot \mathcal{P}(r, \cos \Theta)$$

$$0 = \sin \Theta \cdot \mathcal{P}(r, \cos \Theta)$$

という形をとる。正六角形は  $\cos \Theta = \pm 1$ , すなわち、  $(z_1, z_2, z_3) = (x, x, x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  によって定義される。  $+$  は up-hexagons もしくは l-hexagons とよばれる正六角形を、逆に  $-$  は down-hexagons もしくは g-hexagons とよばれる正六角形を意味する。これらをそれぞれ  $H_+$ ,  $H_-$  と書く。このとき、分岐方程式は

$$0 = \mathcal{H}(r; \cos \Theta = \pm 1) \pm r \mathcal{P}(r; \cos \Theta = \pm 1)$$

となる。さて、Schüler, Lortz and Busse は攪乱を支配する非線形 PDE に含まれる線形作用素が自己随伴である場合には、原点における  $p_2$  の値が0になることを示した。 [19] したがって、そのような場合には  $\cos \Theta = \pm 1$  の違いを引き出すために  $\mathcal{H}$  に含まれる  $q$  に比例する項が必要となるが、それは4次のオーダー ( $O(4)$ ) ではじめて実現される。

三角形は  $\cos \Theta \neq \pm 1$ , すなわち、  $(z_1, z_2, z_3) = (z, z, z)$   $z \in \mathbf{C}$  によって定義されるが、分岐方程式

$$0 = \mathcal{H}(r, \cos \Theta), \quad 0 = \mathcal{P}(r, \cos \Theta)$$

から  $r$  と  $\Theta (\neq n\pi)$  が確定するためには5次の非線形項が必要である。

Table 2: 1 次ならびに 2 次分岐解に対する Jacobi 行列の固有値 (上下非対称)

Label	Eigenvalue (multiplicity)
I	$\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}$ (6)
R	$0$ (1), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}$ (1), $\frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2^r}{\partial x_3}$ (2), $\frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2^r}{\partial x_3}$ (2)
H	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}$ (1), $3\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1}$ (1), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}$ (2)
RA	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_2^i}{\partial y_2}$ (1), $\frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2^r}{\partial x_3}$ (1), $\lambda_1, \lambda_2$ $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2^r}{\partial x_3}$ , $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} (\frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_2^r}{\partial x_3}) - 2 \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2} \frac{\partial g_2^r}{\partial x_1}$
T	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} - \frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}$ (2), $\lambda_1, \lambda_2$ $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}$ , $\lambda_1 \lambda_2 = (\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial x_2})(\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}) - (\frac{\partial g_1^r}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial y_2})(\frac{\partial g_1^i}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^i}{\partial x_2})$

なお, 長方形は  $(z_1, z_2, z_3) = (x, y, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  によって定義される.

以上のように, up-hexagons と down-hexagons とを結ぶ三角形の 2 次分岐をとらえるためには 5 次の非線形項を含む振幅方程式を導出する必要がある.

同変分岐理論にもとづくと, 上下非対称な場合, 1 次分岐解と 2 次分岐解に対する Jacobi 行列の固有値は Table 2 のように求められる. ここで,  $g_j^r$  はベクトル場  $g_j$  の実部,  $g_j^i$  は虚部を表し,  $x_j = \text{Re } z_j$ ,  $y_j = \text{Im } z_j$  である. 括弧内の数字は直前の固有値の重複度を意味する.

#### 4 上下の対称性のもとでの対流パターン

流体層の水平な中心面  $z = 1/2$  に関して上下の対称性が存在する場合には, 振幅方程式はこの対称性の影響を強く受ける. 上下の対称性として

$$z \rightarrow 1 - z : w \rightarrow -w, \theta \rightarrow -\theta$$

を要請する. 付加的な対称群  $Z_2$  は  $(z_1, z_2, z_3)$  に対して

$$\sigma_h : (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (-z_1, -z_2, -z_3)$$

のように作用する.  $\Gamma_h = D_6 + T^2 \oplus Z_2$ -不変な振幅方程式は

$$\dot{z}_1 = z_1 \mathcal{L}(\lambda, u_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2) + \bar{z}_2 \bar{z}_3 q \mathcal{M}(\lambda, u_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2),$$

$$\mathcal{L} = l_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2) + u_1 l_3(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2) + u_1^2 l_5(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2),$$

$$\mathcal{M} = m_5(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2) + u_1 m_7(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2) + u_1^2 m_9(\lambda, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, q^2)$$

という一般形をもつ. [12]

この場合、1次分岐解としては §3 に述べたロール (R), 正六角形 (H) の他にパッチワークキルト (PQ) とよばれる長方形パターンと正三角形 (RT) が、また、2次分岐解としては三角形 (T) と長方形 (RA, 偽六角形) の他に虚長方形、2重モードとよばれる合計4種類のパターンが存在可能であることが同変分岐理論から導かれる。

パッチワークキルトは  $(z_1, z_2, z_3) = (0, x, x), x \in \mathbf{R}$  によって定義される。

つぎに  $z_1 = z_2 = z_3$  という状況を考え、 $z_j = r_j(t)e^{i\theta_j(t)}, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \Theta(t)$  とおく。分岐方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(r, \cos^2 \Theta) + 2r^4 \cos^2 \Theta \cdot \mathcal{M}(r, \cos^2 \Theta) \\ 0 &= \cos \Theta \sin \Theta \cdot \mathcal{M}(r, \cos^2 \Theta) \end{aligned}$$

という形をとる。正六角形は  $\cos \Theta = \pm 1$ , すなわち  $(z_1, z_2, z_3) = (x, x, x), x \in \mathbf{R}$  で定義される。分岐方程式には  $q$  がつねに2乗の形で含まれるため、正六角形は

$$0 = \mathcal{L}(r; \cos^2 \Theta = 1) + 2r^4 \mathcal{M}(r; \cos^2 \Theta = 1)$$

の解として求められる。このとき、 $\cos \Theta = \pm 1$ , すなわち、up-hexagons と down-hexagons を区別することができない。

正三角形は  $\cos \Theta = 0$ , すなわち、 $(z_1, z_2, z_3) = (ix, ix, ix), x \in \mathbf{R}$  によって定義される。分岐方程式は

$$0 = \mathcal{L}(r; \cos \Theta = 0)$$

である。正六角形と正三角形との違いは  $\cos^2 \Theta = 1, 0$  の違いと、 $2r^4 \mathcal{M}$  の項の有無である。前者の相違については7次の非線形項を含めないと識別することができないが、後者の相違については5次の非線形項を含めることによって識別可能である。

三角形は §3 と同様に  $\cos \Theta \neq \pm 1$ , すなわち、 $(z_1, z_2, z_3) = (z, z, z), z \in \mathbf{C}$  によって定義されるが、今の場合には分岐方程式は

$$0 = \mathcal{L}(r, \cos^2 \Theta), \quad 0 = \mathcal{M}(r, \cos^2 \Theta)$$

となる。これらから  $r, \Theta (\neq n\pi/2)$  を求めるためには、振幅方程式が7次の非線形項を含む必要がある。

§3 の上下非対称な状況では存在しなかった2次分岐解として、虚長方形と2重モードがあるが、Rayleigh-Bénard 問題では直接現れないため、ここでは割愛する。

以上のように、上下の対称性が存在する場合には、4種類の1次分岐解を明確に識別するために、5次の非線形項が必要である。

$z = 1/2$  に関する上下の対称性が存在する場合、対称群  $D_6 + T^2 \oplus Z_2$  のもとでの同変分岐理論によると、1次分岐解ならびに2種類の2次分岐解に対する Jacobi 行列の固有値は Table 3 のように求められる。

## 5 中心多様体定理の方法にもとづく振幅方程式の導出

Boussinesq 近似のもとでの攪乱に対する基礎方程式は

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} &= -\nabla^* p^* - \rho g e_z + \mu \Delta^* \vec{v}^*, \\ \frac{DT^*}{Dt^*} &= \kappa \Delta^* T^*, \quad \nabla^* \cdot \vec{v}^* = 0 \end{aligned}$$

Table 3: 1 次ならびに 2 種類の 2 次分岐解に対する Jacobi 行列の固有値 (上下対称)

Label	Eigenvalue (multiplicity)
I	$\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}$ (6)
R	$0$ (1), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}$ (1), $\frac{\partial g_2^r}{\partial x_2}$ (4)
PQ	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2^r}{\partial x_1}$ (1), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} - \frac{\partial g_2^r}{\partial x_1}$ (1), $\frac{\partial g_3^r}{\partial x_3}$ (1), $\frac{\partial g_3^i}{\partial y_3}$ (1)
H	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}$ (1), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}$ (2), $3\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1}$ (1)
RT	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}$ (1), $\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}$ (1), $\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} - \frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}$ (2)
RA	$0$ (2), $\frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} - \frac{\partial g_3^r}{\partial x_2}$ (1), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3^r}{\partial x_2}$ (1), $\left(\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}\left(\frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3^r}{\partial x_2}\right) - 2\frac{\partial g_1^i}{\partial x_2}\frac{\partial g_2^r}{\partial x_1}\right) / \left(\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3^r}{\partial x_2}\right)$ (1), $\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_2^i}{\partial y_2}$ (1)
T	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} - \frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}$ (2), $\lambda_1, \lambda_2$ $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}$ , $\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial g_1^i}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_1^i}{\partial y_2}\right) - \left(\frac{\partial g_1^r}{\partial y_1} + 2\frac{\partial g_1^r}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial g_1^i}{\partial x_1} + 2\frac{\partial g_1^i}{\partial x_2}\right)$

で与えられる。ここで流体の密度として

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T^* - T_t)]$$

のような温度の 1 次関数を仮定する。適当な無次元化を行うと、無次元パラメータとして

$$R = \frac{\rho_0 g \alpha^{(1)}(T_b - T_t) d^3}{\mu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}$$

によって定義される Rayleigh 数と Prandtl 数が現れる。

さて、議論を簡単にするためにここでは

$$(u, v, w, p, \theta)^T = \psi$$

とおく。このとき、非線形攪乱に対する PDE は

$$\frac{\partial}{\partial t} S\psi - \mathcal{L}(R)\psi = \mathcal{N}(\psi, \psi), \quad \mathcal{B}\psi = 0 \quad \text{at } z = 0, 1$$

のように書くことができる。ここで、 $S$ ,  $\mathcal{L}$ , および  $\mathcal{B}$  は線形作用素であり、 $\mathcal{N}$  は 2 次の非線形項である。境界条件としては上下境界  $z = 0, 1$  ともに固体壁、 $z = 0$  が固体壁で  $z = 1$  が自由境界、 $z = 0, 1$  ともに自由境界という 3 種類の同次条件を想定し、 $\mathcal{B}\psi = 0$  と表記した。実験途中で流体の物性値を人為的に変化させることは不可能であるため、Prandtl 数  $P$  の値は固定し、Rayleigh 数  $R$  を分岐パラメータとして取り扱う。Busse balloon に関する実験では thermal imprinting を用いて波数を人為的に変化させるという手法が用いられている。[6] しかし、実験途中で波数を連続的に変化させることは不可能であるため、これも固定して考えるのが妥当である。



$\psi$  を波数平面上で  $2\pi/3$  離れた 2 方向への 2 重 Fourier 級数と線形固有関数列で 3 重展開する：

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{m,n}^{(j)}(t) \phi_{m,n}^{(j)}(z) e^{imk_c x} e^{ink_c(\frac{-x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2})}.$$

振幅方程式の形式的な導出過程では線形作用素の自己随伴性を仮定する必要はないので、固有関数間には従直交性が成り立つと考える。これを用いると、展開係数に対する無限次元の力学系を得る：

$$\dot{A}_{m,n}^{(j)} = \sigma_{m,n}^{(j)}(\mu) A_{m,n}^{(j)} + \sum_{k,l} \lambda_{k,l,m-k,n-l}^{(j,pq)} A_{k,l}^{(p)} A_{m-k,n-l}^{(q)}.$$

$A_{m,n}^{(j)}$  のうち  $A_{1,0}^{(1)}$ ,  $A_{0,1}^{(1)}$ ,  $A_{-1,1}^{(1)}$ ,  $A_{-1,0}^{(1)}$ ,  $A_{0,-1}^{(1)}$ ,  $A_{1,1}^{(1)}$  の 6 つが中心モードの振幅関数であり、それ以外のすべてのものは安定モードの振幅関数である。そこで、

$$A_{m,n}^{(j)} = h_{m,n}^{(j)}(A_{1,0}^{(1)}, A_{0,1}^{(1)}, A_{-1,-1}^{(1)}, A_{-1,0}^{(1)}, A_{0,-1}^{(1)}, A_{1,1}^{(1)}),$$

$$h_{m,n}^{(j)}(0) = dh_{m,n}^{(j)}(0) = 0$$

の形の中心多様体を仮定し、[5] 表記の簡単のため  $A_{1,0}^{(1)} \rightarrow z_1$ ,  $A_{0,1}^{(1)} \rightarrow z_2$ ,  $A_{-1,-1}^{(1)} \rightarrow z_3$ ,  $A_{-1,0}^{(1)} \rightarrow \bar{z}_1$ ,  $A_{0,-1}^{(1)} \rightarrow \bar{z}_2$ ,  $A_{1,1}^{(1)} \rightarrow \bar{z}_3$  と書くことにすると、 $O(5)$  の近似では次の形の振幅方程式を得る：

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & z_1 [h_{1,\lambda}(0)\lambda + h_{1,\sigma_1}(0)\sigma_1 + h_3(0)u_1 + h_{1,q}(0)q \\ & + \frac{1}{2}h_{1,\sigma_1\sigma_1}(0)\sigma_1^2 + h_{1,\sigma_2}(0)\sigma_2 + h_{3,\sigma_1}(0)u_1\sigma_1 + h_5(0)u_1^2] \\ & + \bar{z}_2\bar{z}_3 [p_2(0) + p_{2,\sigma_1}(0)\sigma_1 + p_4(0)u_1 + p_{2,q}(0)q]. \end{aligned}$$

ただし、 $\Gamma$ -不変多項式の原点における Taylor 展開形との対応がわかるように、いくつかの項をまとめなおした。

このように、5 次の振幅方程式の導出に中心多様体の方法を用いた。[9] 最近小川[16] と奥田[17] によって、 $z = 0, 1$  とともに自由境界の場合に対する 3 次の振幅方程式の導出が中心多様体の方法を用いて行われている。そこでは固有関数系を陽的に正弦関数などを用いて表すことができるため、ここで行ったような固有関数展開は必要としない。

## 6 分岐特性

今回は Boussinesq 近似が成り立ち、流体の密度が温度の 1 次関数で表される場合に限定する。したがって、線形作用素  $S$  および  $\mathcal{L}$  は同次境界条件  $B\psi = 0$  のもとに自己随伴である。上下の境界がともに固体壁、ともに自由境界という上下の対称性が存在する場合と、下面が固体壁、上面が自由境界という上下の対称性が存在しない場合について、振幅方程式に含まれる係数の値を具体的に評価し、分岐特性を調べた。

### 6.1 上下非対称の場合

まず、下面が固体壁、上面が自由境界であるような、付加的な  $Z_2$  対称性が存在しない状況からはじめよう。§3 で述べたように振幅方程式を 3 次で打ち切ると、1 次分岐解としてはロール、正六角形、パッチワークキルトの 3 種類のみが存在可能である。Figure 3 に水 ( $P = 7$ ) に対する分岐ダイアグラムを示す。3 種類のブランチには安定性の情報として固有値の実部の符号を付けてある。固

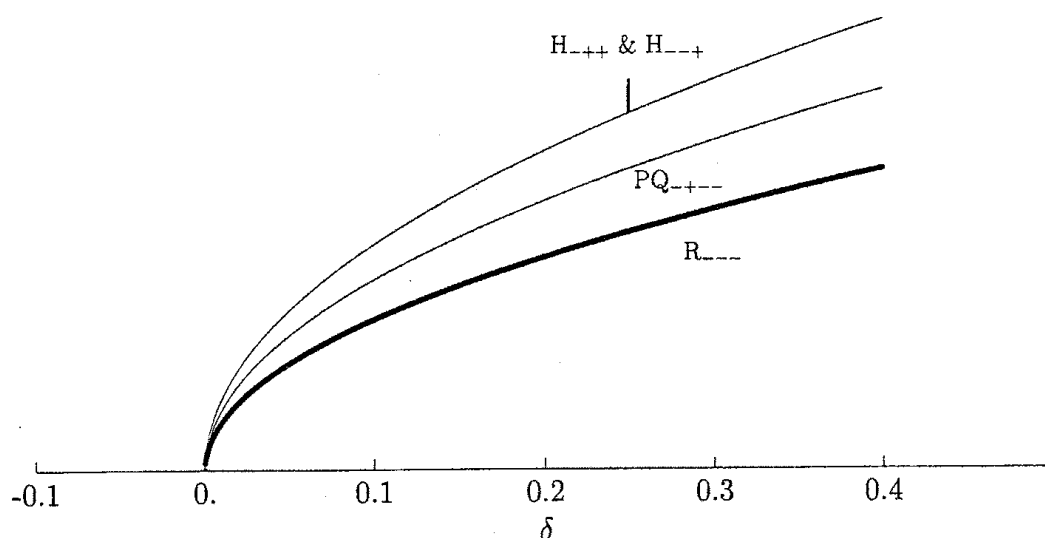


Figure 3: 正六角形格子上的3次の振幅方程式にもとづく分岐ダイアグラム. 下面は固体壁, 上面は自由境界.  $P = 7$ . 臨界波数における結果.

有値の順は Table 2 の順であり, 0 固有値と, 固有値の重複度は省略している. 符号がすべて負もしくはすべて正の解を軌道安定であると判定し, 太線で示した. 図より明らかなように, ロールは  $\delta > 0$  で安定であり, 正六角形とパッチワークキルトは不安定である. この分岐特性は, 次の小節 §6.2 の上下対称な場合の3次の振幅方程式にもそのまま成り立つ. 正六角形の中心部分を流体が上昇するのか, 下降するのかは, §4 に述べたように, 上下の対称性の存在下では区別することができない. また, 3次の振幅方程式では, 上下非対称な場合にもそれらを区別することができない. しかし, 5次の方程式を用いれば, 上下対称性が存在しない場合には, 上昇・下降を明確に区別できる.

5次の非線形項までを取り込んだ振幅方程式を用いた結果を Fig.4 に示す. Figure 3 では単に H として表されていた正六角形のブランチが Fig.4 では  $H_+$  と  $H_-$  に分かれ, 三角形のブランチ T が  $\delta = 0.036$  における  $H_+$  のブランチから2次分岐解として分岐している. Figure 3 でのパッチワークキルトは原点から1次分岐していたが, Fig.4 では長方形 (RA, 偽六角形) に変化して原点と  $H_-$  を橋渡しする部分と,  $H_+$  から2次分岐して右へ伸びていく部分とに分裂している. このように, 5次の非線形項を取り込むと三角形と長方形のブランチを求めることが可能になったが, これらの解はいずれも不安定であることがわかった. なお,  $\delta \simeq 0.2$  付近から  $H_-$  が, また  $\delta \simeq 0.4$  付近から  $H_+$  が安定性を回復することがわかる. このような, 分岐点近傍で不安定な正六角形が, 分岐点から離れたパラメータ領域で安定性を回復したものは reentrant hexagons とよばれている. これについては §7 で少し最近の話題を紹介する.

## 6.2 上下の対称性が存在する場合

Figure 5 には上下面ともに自由境界の場合, Figure 6 には上下面ともに固体境界の場合の分岐ダイアグラムを示す. いずれも5次の非線形項を含む振幅方程式にもとづいている. すでに述べたように, 振幅方程式が3次までの非線形項のみを含む場合には, 線形作用素が自己随伴である上下対称な状況では, 方程式は2次の非線形項を含むことができず, そのため正三角形と正六角形は区別することができない. また, 同変分岐理論によれば, 局所的には, 正三角形と正六角形はいずれかが安定であれば他方は不安定でなければならない. [12] したがって, Figure 3 ではロールが安定であり,

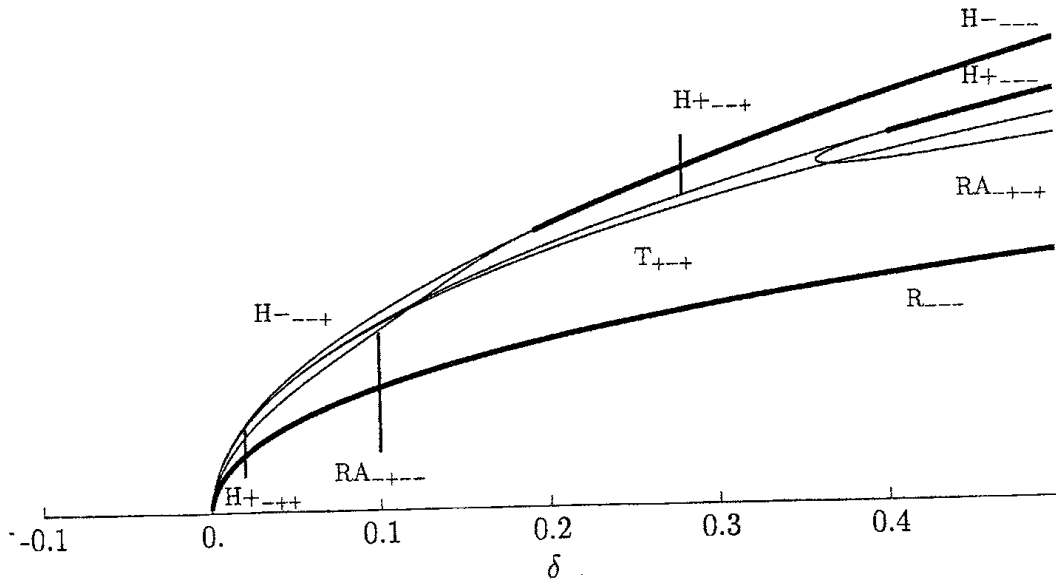


Figure 4: 正六角形格子上的 5 次の振幅方程式にもとづく分岐ダイアグラム. 下面は固体壁, 上面は自由境界.  $P = 7$ . 臨界波数における結果.

Rayleigh-Bénard 対流の実験結果もそれを支持するというだけでは, 正六角形が不安定であると断定する根拠にはならない.

Figure 5 は上下ともに自由境界という仮想的な状況下での, 5 次の非線形項を含む振幅方程式の平衡解の分岐ダイアグラムを表す. 上面が空気に, 下面は水銀で境された水平な水の層における対流実験の結果は知られていないが, 最近 Nishida, Iida and Yoshihara によって行われた分岐の数値解析 [15] によれば, 正三角形 RT が求まっていないことや, 一部パッチワークキルト PQ と長方形 (RA, 偽六角形) の安定性にここでの結果と一致しないところがあるものの, 大まかな分岐特性は Fig.5 によってよく再現されていることがわかる.<sup>1</sup>

Figure 6 では Fig.5 と定性的にまったく同一の分岐ダイアグラムが得られている.

このように, 5 次の非線形項を取り込んだ振幅方程式にもとづくと, 上下対称な場合には, 正六角形 H から明確に区別できる正三角形 RT が原点から 1 次分岐することがわかるが, 残念なことに, 正六角形, 正三角形ともに不安定であった. また, 長方形 RA はパッチワークキルト PQ と正六角形を橋渡しする 2 次分岐解として現れ, RA の分岐点から正六角形は安定性を回復して reentrant hexagons となることが明らかになった.

## 7 おわりに

ここでは, Boussinesq 近似下で, しかも流体密度が温度の 1 次関数として表される状況を考えて, このとき, 3 種類の境界条件のもとで線形作用素は自己随伴であった. 上下非対称の問題では, 自己随伴性は 2 次の非線形項の係数を 0 にする非線形縮退を引き起こすため, [19] 5 次の非線形項を含む振幅方程式が必要であった. また, 上下対称な問題では, すべての偶数次の非線形項の係数は 0 であるため, 5 次の非線形項を含む方程式が必要である. 非 Boussinesq 効果や密度の温度に

<sup>1</sup>Table 3 の固有値に分岐方程式を形式的に代入すると, パッチワークキルトがかならず不安定であることがわかる. これらの不一致の原因は, 同変理論にもとづくここでの解析と Nishida et al. の解析での解空間の取り方の違いにあるものと考えられる.

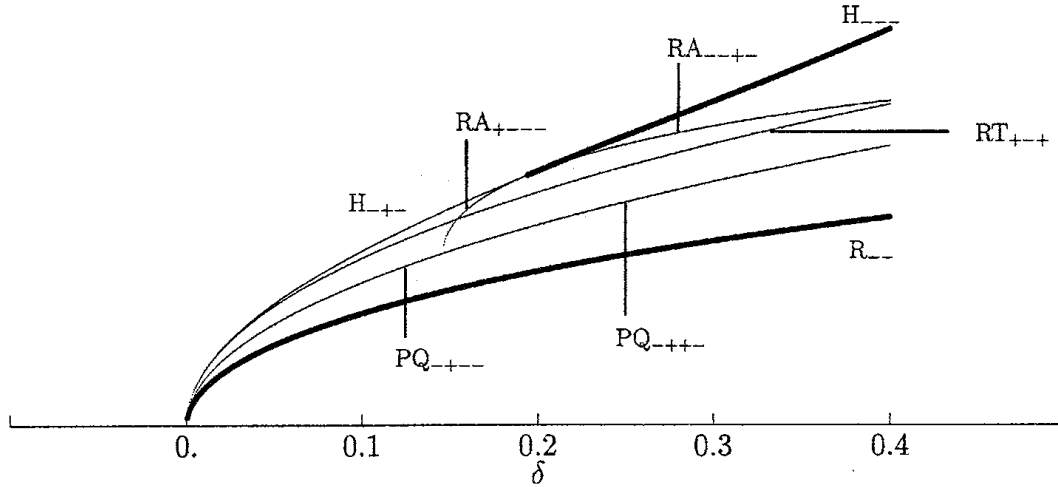


Figure 5: 正六角形格子上的 5 次の振幅方程式にもとづく分岐ダイアグラム. 上下面ともに自由境界.  $P = 7$ . 臨界波数における結果.

対する 2 次以上の依存性を考慮に入れると, 自己随伴性が破れ, さらに上下対称性も崩れる. したがって, そのような状況を想定して求められた 1960 年代の解析結果 (例えば文献 [2]) は正しい.

さて, Assenheimer and Steinberg は実験的に reentrant hexagons を観察した. [1] 近似的に Boussinesq 近似が成立するような状況で水を用いた実験を行い,  $\delta = 2.4$  程度の大きな超臨界パラメータ値において, ロール,  $H_+$ ,  $H_-$  が共存することを見出した. Dewel et al. は中心多様体が臨界円上の 6 つの正六角形格子点と原点での複素振幅関数によって張られている状況を考え,

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1[\sigma_1 + \mu_1|z_1|^2 + \mu_2(|z_2|^2 + |z_3|^2) + \mu_3z_0^2] + \delta_1z_0\bar{z}_2\bar{z}_3 \\ \dot{z}_0 = z_0[\sigma_0 + \mu_3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) + \mu_4z_0^2] + \delta_2(\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3 + z_1z_2z_3) \end{cases}$$

のような 7 次元の 3 次の非線形項を含む振幅方程式を仮定した. [8] このような 3 次の振幅方程式は reentrant hexagons の存在を記述することができる. 原点が中立安定もしくは準中立安定という状況は Marangoni 対流では実現可能であるが, ここで考えているような Rayleigh-Bénard 対流では成立しない. 線形減衰率は波数の低下とともに単調に増加する. Clever and Busse は Boussinesq 近似下で  $P = 7$  に対する正六角形の非線形解の 2 次不安定性を Floquet 解析にもとづいて調べ, Assenheimer and Steinberg が観察したような reentrant hexagons の存在領域が Busse balloon の内側にたしかに存在することを明らかにした. [7]

最近, Roy and Steinberg は  $SF_6$  を用いて非 Boussinesq 効果の大きな実験を行い, 非 Boussinesq 効果を表すパラメータ  $Q$  の値を大きくすると reentrant hexagons の現れるパラメータ値が低下し, 十分に大きな  $Q$  に対しては全域で正六角形が安定に存在可能であることを報告している. [18] Madruga, Riecke and Pesch は, ガレルキン法にもとづく数値解析, Floquet 解析などを用いてこの問題を再検討した. ただし流体としては水を想定している. [14] 彼らは

$$\partial_t z_1 = \xi^2(\mathbf{n}_i \cdot \nabla)^2 z_i + \delta z_i - (\kappa + \delta\mu)\bar{z}_2\bar{z}_3 - g_1|z_1|^2 z_1 - g_2(|z_2|^2 + |z_3|^2)z_1$$

の形の包絡線方程式をモデルとして導入し, 数値解析によって得られた結果の説明を試みた. それによると,  $Q \neq 0$  の場合, 2 次の非線形項の係数  $\kappa$  は非 0 である. [19] 臨界点 ( $\delta = 0$ ) 近傍では

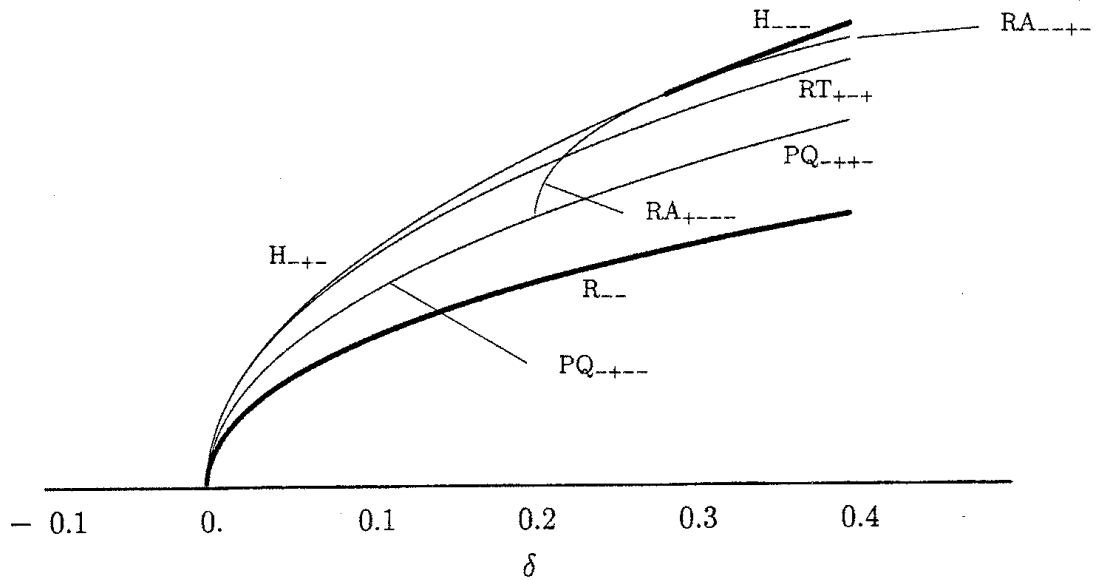


Figure 6: 正六角形格子上的5次の振幅方程式にもとづく分岐ダイアグラム. 上下面ともに自由境界.  $P = 7$ . 臨界波数における結果.

線形項と比べて2次の非線形項が卓越しており、モード間のカップリングが強いために正六角形が安定である。 $\delta$ の値が増加すると、線形項が卓越してモード間のアンバランスが生じ、その結果ロールが安定となり正六角形は不安定化される。 $Q$ の値が大きくなると、 $\delta$ の増加とともに $\delta\mu$ が増大するために2次の非線形項が再び卓越するようになり正六角形が安定化される、という解釈である。拡散項は正六角形が安定なパラメータ領域を $\alpha, R$ 平面上に制限する役割を果たす。しかし、このモデルによれば、 $Q = 0$ の場合には reentrant hexagons を説明することができない。

本研究では、5次の非線形項を含む振幅方程式を Boussinesq 近似が成立する状況下で導出し、上下対称性の存在如何にかかわらず、reentrant hexagons が存在することを明らかにした。その際、解空間を正六角形格子上に制限したため、得られた存在領域は Clever and Busse が求めた領域に対する必要条件を与える。なお、ここで得られた存在領域は $\delta \simeq 0.2$ 程度より高いパラメータ領域であるため、解析の大前提である局所性が崩れている可能性は否定できない。しかし、§2で議論した Stuart-Landau 方程式の収束性の吟味から、 $\delta \simeq 0.2$ 程度のパラメータ領域では $P = 7$ の場合には局所解析がぎりぎり妥当であると考えられる。また、Nishida et al. の数値解析結果と正六角形の安定性に関しては首尾一貫していることから、高次の非線形項を付加してもここで得られた分岐特性は修正されないものと期待される。<sup>2</sup>

7次以上の非線形項を含む振幅方程式を導出することができれば、解析の局所性に関して、より断定的に結論できるはずであるが、正六角形格子上的高次の振幅方程式の導出は複雑を極めるため、今回行ったような手計算による導出は不可能であろう。数式処理の効率的な導入が必要である。

以上では正六角形格子上的パターン形成を議論したが、Busse and Clever は $Q = 0, P = 7$ に対する正方形の非線形解を数値的に求め、その2次不安定性を調べた。[3] その結果、reentrant squares とよばれるべき安定な正方形の存在領域を Busse balloon の内側に見出した。正方形格子がもつ対称群は $\Gamma_s = D_6 + T^2$ である。波数平面上に $\pi/2$ 間隔で配置された臨界円上の格子点に対

<sup>2</sup>波数 $\alpha$ を臨界波数 3.116 から低下させ、reentrant hexagons の存在領域の下限を求めていくと、下限を与える $\delta$ の値は低下し、 $\alpha \simeq 2.3$ では $\delta = 0$ となった。したがって、 $\alpha \simeq 2.3$ 近傍では局所性は保証されていると考えて差し支えない。

Table 4: 正方形格子上的振幅方程式の平衡解に対する Jacobi 行列の固有値

Label	Eigenvalue (multiplicity)
I	$\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}$ (4)
R	$0$ (1), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1}$ (1), $\frac{\partial g_2}{\partial x_2}$ (2)
SQ	$0$ (2), $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}$ , $\frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}$
RH	$0$ (2), $\lambda_1, \lambda_2$ , $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2}$ , $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\partial g_1^r}{\partial x_1} \frac{\partial g_2^r}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1^r}{\partial x_2} \frac{\partial g_2^r}{\partial x_1}$

応する複素振幅を  $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$  とするとき,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  に対する  $\Gamma_s$  の作用は

$$D_4 \begin{cases} R_{\pi/2} : (z_1, z_2) \rightarrow (z_2, \bar{z}_1) \\ \sigma_v : (z_1, z_2) \rightarrow (z_1, \bar{z}_2) \end{cases}$$

$$T^2 : (s, t) \cdot z = (e^{is} z_1, e^{it} z_2)$$

で与えられる。正方形格子上的振幅方程式は

$$\dot{z}_1 = z_1[f_1(\lambda, \tau_1, \tau_2) + |z_1|^2 f_3(\lambda, \tau_1, \tau_2)],$$

$$\tau_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2, \tau_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

という一般形をもつ。この方程式の平衡解としては、ロール (R) ( $|z_1|, |z_2| = (x, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  と正方形 (SQ) ( $|z_1|, |z_2| = (x, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  が1次分岐解として、また菱形 (RH) ( $|z_1|, |z_2| = (x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  が2次分岐解として存在可能であるが、菱形は  $O(5)$  ではじめて存在することができる。なお、これらの解の軌道安定性は Table 4 に示した固有値の実部から評価することができる。5次の振幅方程式を実際に導いて調べた結果、 $\delta$  値を増加させると正方形は安定化し、その後ロールが不安定化することがわかった。この reentrant squares の存在領域は、超臨界パラメーターが  $\delta \simeq 13$  以上という、Busse and Clever が見つけた存在領域とほぼ同じパラメーター領域ではあるが、弱非線形理論の適用範囲を完全に逸脱した領域であることがわかった。もっと高次の非線形項を付加すると reentrant squares の存在領域の下限が弱非線形理論の適用範囲内にまで低下するか、という問題については、実際にそのような高次の振幅方程式の導出を待たなければ何もいうことができない。しかし、5次以上の非線形項が正方形を安定化させる可能性のあることが明らかになったため、reentrant squares の理解が少しだけ進展したということができよう。

## References

- [1] M. Assenheimer and V. Steinberg, "Observation of coexisting upflow and downflow hexagons in Boussinesq Rayleigh-Bénard convection," *Phys.Rev.Lett.* **76** (1996) 756.
- [2] F.H. Busse, "The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle," *J.Fluid Mech.* **30** (1967) 625.

- [3] F.H. Busse and R.M. Clever, "Asymmetric squares as an attracting set in Rayleigh-Bénard convection," *Phys.Rev.Lett.* **81** (1998) 341.
- [4] E. Buzano and M. Golubitsky, "Bifurcation on the hexagonal lattice and the planar Bénard problem," *Phil.Trans.R.Soc.Lond. A* **308** (1983) 617 .
- [5] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory* (Springer-Verlag,1980).
- [6] M.M. Chen and J.A. Whitehead, "Evolution of two-dimensional periodic Rayleigh convection cells of arbitrary wave-number," *J.Fluid Mech.* **31** (1968) 1.
- [7] R.M. Clever and F.H. Busse, "Hexagonal convection cells under conditions of vertical symmetry," *Phys.Rev. E* **53** (1996) R2037.
- [8] G. Dewel, S. Métens, M.F. Hilali and P. Borckmans, *Phys.Rev.Lett* **74** (1995) 4647.
- [9] K. Fujimura, "Centre manifold reduction and the Stuart-Landau equation for fluid motion," *Proc.R.Soc.Lond. A*, **453** (1997) 181.
- [10] T. Herbert, "Nonlinear stability of parallel flows by high-order amplitude expansions" *AIAA J.* **18** (1980) 243.
- [11] E.L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor Vortices* (Cambridge, 1993).
- [12] M. Golubitsky and J.W. Swift and E. Knobloch, "Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection," *Physica* **10D** (1984) 249.
- [13] E. Knobloch, "Pattern selection in long-wavelength convection," *Physica D* **41** (1990) 450.
- [14] S. Madruga, H. Riecke and W. Pesch, "Reentrant Hexagons in non-Boussinesq Convection," (preprint) (2004).
- [15] T. Nishida, T. Ikeda and H. Yoshihara, "Pattern formation of heat convection problems," in *Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics* (eds. I. Babuska, P. G. Ciarlet and T. Miyoshi), *Lecture Notes in Computational Sciences and Engineering* **19** (Springer, 2002) 209.
- [16] 小川知之, ベナール対流におけるヘキサゴンパターンと複合ロールの安定性, 京都大学数理解析研究所講究録 **1368** (2004).
- [17] 奥田孝志, パターン形成の分岐解析, 大阪大学基礎工学研究科修士論文 (2004).
- [18] A. Roy and V. Steinberg, "Reentrant hexagons in non-Boussinesq Rayleigh-Bénard convection: effect of compressibility," *Phys.Rev.Lett* **88** (2002).
- [19] A. Schlüter, D. Lortz and F. Busse, "On the stability of steady finite amplitude convection," *J.Fluid Mech.* **23** (1965) 129.